

2024 秋季初三数学每日一题打卡 006

006 试题来源：2022 秋星海月考第 27 题

我们给出定义：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，分别以 x_1, x_2 为横坐标和纵坐标得到点 $M(x_1, x_2)$ ，则称点 M 为该一元二次方程的衍生点。

(1) 若方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，该方程的衍生点 M 为 _____。

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (5m + 1)x + 5m = 0$ 的衍生点为 M ，过点 M 向 x 轴和 y 轴作垂线，两条垂线与坐标轴恰好围成一个正方形，求 m 的值。

(3) 是否存在 b, c ，使得不论 $k (k \neq 0)$ 为何值，关于 x 的方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的衍生点 M 始终在直线 $y = kx + 2(k + 3)$ 的图象上，若有请求出 b, c 的值，若没有说明理由。

试题解析

我们给出定义:若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 分别以 x_1, x_2 为横坐标和纵坐标得到点 $M(x_1, x_2)$, 则称点 M 为该一元二次方程的衍生点.

(1) 若方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 该方程的衍生点 M 为 $\underline{(1, 2)}$.

解: (1) $\because x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为 $x = 1$ 或 2 ,

$\therefore x_1 = 1, x_2 = 2$,

$\therefore M(1, 2)$,

\therefore 该方程的衍生点 M 的坐标 $(1, 2)$.

故答案为: $(1, 2)$;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (5m + 1)x + 5m = 0$ 的衍生点为 M , 过点 M 向 x 轴和 y 轴作垂线, 两条垂线与坐标轴恰好围成一个正方形, 求 m 的值.

(2) $x^2 - (5m + 1)x + 5m = 0$ 的解为 $x = 1$ 或 $x = 5m$,

当 $5m \geq 1$ 时, $m \geq \frac{1}{5}$,

此时 $M(1, 5m)$,

由题意可得 $1 = 5m$,

解得 $m = \frac{1}{5}$;

当 $0 \leq 5m < 1$ 时, $0 \leq m < \frac{1}{5}$,

此时 $M(5m, 1)$,

$\therefore 5m = 1$,

$\therefore m = \frac{1}{5}$ (不合题意舍去);

当 $5m < 0$ 时, $M(5m, 1)$,

此时 $1 = -5m$,

解得 $m = -\frac{1}{5}$;

综上所述: m 的值为 $-\frac{1}{5}$;

(3) 是否存在 b, c , 使得不论 $k (k \neq 0)$ 为何值, 关于 x 的方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的衍生点 M 始终在直线 $y = kx + 2(k + 3)$ 的图象上, 若有请求出 b, c 的值, 若没有说明理由.

始终在一条动直线上, 说明, 过的是直线上的定点, 这是这一小问的解题要点

(3) 存在 b, c 满足条件, 理由如下:

$\because y = kx + 2(k + 3) = kx + 2k + 6 = k(x + 2) + 6$,

\therefore 直线经过定点 $(-2, 6)$,

\therefore 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的衍生点 M 为 $(-2, 6)$,

$\therefore b = -4, c = -12$.

【点评】新定义是近几年的热点, 也是很多孩子培优路上的绊脚石. 套路题一学就会, 新定义, 每次都不同. 殊不知, 这才是考较孩子基本能力的方式, 所谓新定义, 并不是 100% 的新知识点, 而是把学过的知识换个方式, 赋予一个新的名字. 这就在要求我们能根据自己的知识储备, 提炼出新定义与已知知识之间的关系.